

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1992/93

April 1993

ZMC 211/3 - Kaedah Matematik II

Masa : (3 jam)

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua LIMA soalan.

Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Vektor kedudukan bagi suatu zarah dalam suatu masa t diberikan dengan

$$\underline{r} = a(\cos t \underline{i} + \sin t \underline{j}) + bt \underline{k}$$

disini a dan b ialah pemalar. Hitungkan halaju dan pecutannya pada suatu masa t . Juga tunjukkan $\underline{r} \cdot \ddot{\underline{r}}$ dan $\ddot{\underline{r}} + \dot{\underline{r}}$ adalah pemalar dan $\underline{r} \cdot \ddot{\underline{r}} = 0$.

(30/100)

- (b) Tunjukkan bahawa permukaan satah bagi skalar $\phi = y^2 + z^2 - x$ dan $\psi = \ln(y^2 + z^2) + 4x$ membentuk permukaan satah yang berotogon di antara satu sama lain.

(30/100)

- (c) Hitungkan kamiran garisan $\phi = (x^2 + y^2)\sqrt{z}$ merujuk pada t dan pada jarak lengkok s , sepanjang lengkung c yang diberikan dengan $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t^2$, $0 \leq t \leq 1$.

(40/100)

2. (a) Tunjukkan bahawa

$$\text{div}(r^n \underline{r}) = (n+3)r^n$$

disini $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ dan n ialah sebarang pemalar.

(30/100)

- (b) Hitungkan $\nabla^2 f(r)$; disini f ialah fungsi r yang boleh dibezaikan dua kali dan $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$. Dapatkan semua $f(r)$ supaya $\nabla^2 f = 0$.

(40/100)

...2/-

- (c) Nilaiikan sama ada medan vektor tersebut abadi atau bukan abadi dan hitungkan keupayaan yang berkaitan:

(i) $\vec{F} = yz \vec{i} + (x-y)\vec{j} + 2xz \vec{k}$

(ii) $\vec{F} = (2x + yz)\vec{i} + (xz - 2)\vec{j} + xy \vec{k}$.

(30/100)

3. (a) Nyatakan teorem Gauss dan berikan maksud fiziknya.

(20/100)

- (b) Dengan menggunakan teorem Gauss, hitungkan

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

disini $\vec{F} = xy\vec{i} + \vec{j} + (z+1)\vec{k}$ dan S ialah permukaan terlengkung hemisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$.

(40/100)

- (c) Hitungkan fluks bagi suatu medan vektor $\vec{F} = z\vec{j} - \vec{k}$ melalui permukaan $x = \sin u \cos v, y = \sin u \sin v, z = \cos^2 u$ disini $0 \leq u \leq \frac{1}{2}\pi$ dan $0 \leq v < 2\pi$.

(40/100)

4. (a) Nyatakan teorem Stokes' dan berikan maksud fiziknya.

(20/100)

- (b) Hitungkan

$$\int_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

disini $\vec{F} = xz\vec{i} - yz\vec{j} + 2xy\vec{k}$ melalui sebahagian permukaan $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 10$ dan $y \geq 1$.

(40/100)

- (c) Buktikan bahawa

$$(i) \oint \vec{r}^2 d\vec{r} = -2 \int \vec{r} \times d\vec{S}$$

disini $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

...3/-

$$(ii) \int_V \vec{F} \cdot \text{grad } \phi \, dV = \int_S \phi \vec{F} \cdot d\vec{S} - \int_V \phi \text{div } \vec{F} \, dV$$

disini S ialah permukaan tutup yang sempadani isipadu V . ϕ dan \vec{F} ialah fungsi selanjar dan terbitan separa pada tertib pertama juga selanjar.

(40/100)

5. (a) Sistem koordinat silinder ditakrifkan oleh transformasi

$$x = \rho \cos \phi \quad y = \rho \sin \phi \quad z = z$$

disini $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $-\infty \leq z \leq +\infty$

- (i) Tentukan Jacobian bagi transformasi.

(10/100)

- (ii) Cari fakta skala h_ρ , h_ϕ , h_z dan vektor unit $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$, \hat{z} bagi sistem koordinat ini.

(10/100)

- (iii) Kemudian selesaikan vektor unit \underline{i} , \underline{j} , \underline{k} dalam ungkapan $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$, \hat{z} .

(10/100)

- (iv) Dapatkan operator ∇ dalam vektor unit $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$, \hat{z} .

(20/100)

- (v) Jika $\vec{q} = \cos \phi \hat{\rho} + \rho \sin \phi \hat{\phi}$ dalam koordinat silinder, dapatkan titik lokus dimana $\vec{q} \times (\text{keikalan } \vec{q}) = 0$.

(20/100)

- (b) Timbangkan suatu heliks bulatan yang ditakrifkan seperti

$$\vec{r} = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

Hitungkan unit tangen vektor \hat{T} , jejari kelengkungan dan kilasannya. Jika $b = 0$, dapatkan nilai jejari kelengkungan dan kilasannya.

(30/100)